Penrose projecties

Drikus Kleefsman *

October 24, 2013

Abstract

Keywords: matrix, eigenvalue, rotation, unitary, tiling, penrose

Er zijn verschillende manieren om Perose tilings te maken. In het project zal gebruik gemaakt worden van de projectie-methode. Dit artikel is een analyse van de gebruikte wiskunde bij deze methode. Ingegaan wordt op $N \times N$ matrices en hoe deze kunnen worden gekenmerkt door eigenvectoren. We maken gebruik van complexe eigenvectoren in N-dimensionale ruimtes. Het doel is om de gebruikte wiskunde binnen een computer-programma over Penrose tilings toe te passen.

1 Inleiding

Matrices bestaan uit rijen getallen in een rechthoekig schema. Een voorbeeld is

$$\begin{bmatrix} 10 & 20.3 & -17 \\ -5.1 & 10.2 & 103 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Rotaties en andere lineaire operatoren op een lineaire vectorruimte kunnen worden weergegeven met matrices. Matrices in een N-dimensianale ruimte bevatten $N \times N$ elementen. We beperken ons tot dergelijke $N \times N$ matrices. Een kenmerk van zo'n matrix is of er een inverse bestaat. Een inverse van een $N \times N$ matrix M is zelf ook een $N \times N$ matrix, aangegeven met M^{-1}, zodat $M.M^{-1} = I$, waarin I de eenheidsmatrix is. Een voorbeeld van een matrix met een inverse is eeen rotatie in drie dimensies rond de z-as, waarbij er om een hoek van 45^0 wordt gedraaid. De matrix is

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vanzelfsprekend heeft deze matrix een inverse en wel de matrix die een rotatie in de omgekeerde richting weergeeft. Een eigenschap waarmee snel kan worden gezien of een matrix een inverse heeft is de determinant. Als de determinant ongelijk 0 is bestaat de inverse. Een voorbeeld van een lineaire operatie zonder inverse is een projectie van een drie-dimensionale wereld op een twee-dimensionaal vlak.

Een nauwkeurigere karakerisering van een matrix dan door de determinant wordt gegeven door zijn eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren. In dit artikel worden rotaties in N-dimensies beschreven en de manier waarop de eigenvectoren die rotaties karakteriseren.

Section 2 beschrijft N-dimensionale lineaire ruimtes en N-dimensionale kubussen. Section 3 beschrijft rotaties in complexe ruimtes. Section 4 beschrijft hoe de rotaties met behulp van eigenvectoren worden gekarakteriseerd. Section 5 beschrijft het gebruik van projecties. Tenslotte wordt in Section 6 de link gelegd met de projectie-methode voor het maken van een Penrose tiling.

2 Ruimtes in N dimensies

Uit eigen ervaring zijn we vertrouwd met drie-dimensionale ruimtes. In een drie-dimensionale wereld bestaat een basis van drie onafhankelijke vectoren. Het is een basis omdat alle vectoren in de ruimte te schrijven zijn als een lineaire combinatie van de basisvectoren. En dat de vectoren onafhankelijk zijn wil zeggen dat er niet een basisvector is die te schrijven is als een lineaire combinatie van de andere twee. In een vier-dimensionale vectorruimte is er nog een extra onafhankelijke basisvector en in een N-dimensionale zijn er N onafhankelijke basisvectoren. Laten de basisvectoren worden aangegeven door b_i. Elke vector x is dus te schrijven als $x_i b_i$. De x_i heten de coordinaten van x (t.o.v. de basis b. Vaak gaan we er vanuit dat de x_i reeele getallen zijn. In het geval de x_i complexe getallen zijn spreken we van een N-dimensionale complexe vectorruimte. Binnen een vectorruimte kan een inproduct (ofwel dot prod-

*versie 1.1; Email: project@drikus.net

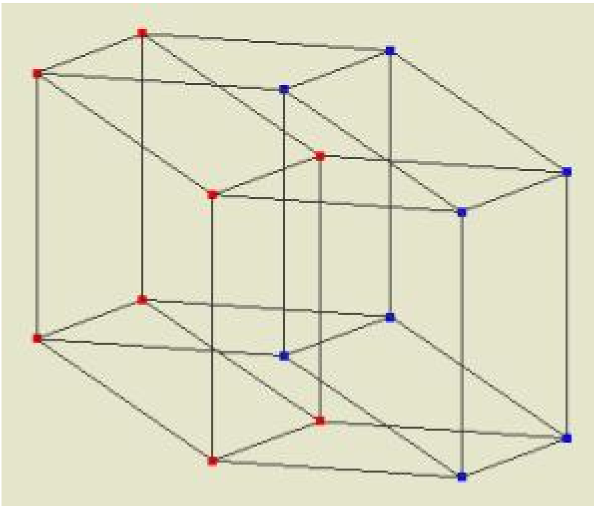

Figure 1: Kubussen in tesseract

uct) tussen twee vectoren $x = x_i b_i$ en $y = y_i b_i$ worden gedefinieerd door middel van $(x, y) = \sum(x_i y_i)$. *Definitie orthogonale vectoren*: Als het inproduct van x en y 0 is staan beide vectoren loodrecht (orthogonaal) op elkaar. Als het om een complexe vectorruimte gaat is het inproduct gedefinieerd door $(x, y) = \sum(x_i^* y_i)$. De lengte van een vector x kan,zowel in reeele als in complexe ruimtes, worden gedefinieerd via het inproduct met zichzelf: $\sqrt{\sum(x_i^* x_i)}$.

Om vertrouwheid te krijgen met hogere dimensies wordt meestal eerst nagegaan hoe een vier-dimensionale kubus (een tesseract) er uitziet. De vergelijking waaraan de punten van een tesseract voldoen is

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \ 0 \leqq x_i \leqq 1 \ \forall i \tag{3}$$

Een figuur waarin (noodzakelijkerwijze verwrongen) een tesseract wordt weergegeven is te vinden in figuur 1. Voor andere weergaven zie wikipedia [3]. Een tesseract heeft buitenvlakken die worden gegeven door

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in tesseract, x_i = 0 \quad \text{of} \quad 1 \tag{4}$$

In elke dimensie zijn er 2 van deze vlakken. Er zijn dus 4×2 van dergelijke vlakken bij een tesseract.

Elk grensvlak is een drie-dimensionale kubus. In figuur 1 zijn de rode punten in het vlak $x_3 = 0$ en de blauwe punten in $x_3 = 1$. En elk punt van de drie-dimensionale kubus (ook een punt middenin zo'n drie-dimensionale kubus) is vanuit het binnenste van de tesseract willekeurig dicht te benaderen. Een andere verrassende gewaarwording is dat twee vlakken elkaar kunnen raken in een punt, zonder dat er een snijlijn is. In een hoekpunt van een tesseract komen $3 + 2 + 1 = 6$ twee-dimensionale vlakken samen. Het vlak dat te schrijven is als $\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1$ en het vlak dat te schrijven is als $\lambda_2 b2 + \lambda_3 b_3$ hebben maar een punt gemeenschappelijk. Alle lijnen in deze beide vlakken staan loodrecht op elkaar. *Definitie volledig orthogonale vlakken*: beide vlakken zijn volledig orthogonaal als alle lijnen in beide vlakken loodrecht op elkaar staan. Op dezelfde manier is ook te denken aan een vijf-dimensionale ruimte. Een kubus in een vijf-dimensionale ruimte heet een penteract. Deze heeft als grensvlakken een tiental tesseracten. In een hoekpunt van een penteract kunnen een vlak en een driedimensinaal volume in dat punt samenkomen, zonder meerdere punten gemeen te hebben.

3 Rotaties in N dimensies

Rotaties in N-dimensionale vectorruimtes vormen een groep. Het product van twee rotaties geeft een nieuwe rotatie. De groepen worden aangeduid met O(N) of U(N). De O(N) (orthogonale) groepen spelen een rol in reeele vectorruimten en de U(N) (unitaire) groepen een soortgelijke in complexe vectorruimten. Een rotatie is een lineaire transformatie op vectoren die de inproducten van vectoren onveranderd houdt. Een voorbeeld van een rotatie in drie dimensies is 2. Het uitvoeren van de rotatie op de cordinaten x_i en y_i levert nieuwe cordinaten x_i' en y_i' op waarvoor dus geldt: $(x_i', y_i') = (x_i, y_i)$. Het voorbeeld is ook lid van de groep SO(3). De groep SO(N) heeft als determinant +1 en is een subgroep van O(N). De S uit SO(N) is een afkorting van special, waarmee dus wordt aangegeven dat de determinant 1 is. De meest bekende groep is SO(3), de rotaties in drie-dimensionale reeele ruimtes. De transformatie in drie dimensies, weergegeven door

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

is wel lid van de groep O(3), maar niet van de groep SO(3). Merk op dat deze transformatie wel het inproduct van vectoren onveranderd laat.

De groep U(N) laat het inproduct in complexe ruimtes ongewijzigd. SU(N) is een afkorting van special unitary matrices in N dimensions. Met special wordt weer aangegeven dat het gaat om de subgroep van unitaire matrices waarvoor de determinant 1 is. De meest bekende groepen zijn SU(2) en SU(3). Een eigenschap van unitaire matrices moet dus zijn dat voor twee willekeurige vectoren u_i en v_i moet gelden dat

$$\begin{aligned}
(u,v) &= (Uu,Uv) && (6)\\
\sum(u_i^* v_i) &= \sum(\sum U_{ij}^* u_j^* \sum U_{ik} v_k)\\
&= \sum(\sum\sum U_{ij}^* U_{ik} u_j^* u_k)\\
&= (\sum\sum(\sum(U_{ji}^T)^* U_{ik}) u_j^* u_k)\\
&= \sum\sum(U^\dagger U)_{jk} u_j^* u_k
\end{aligned}$$

Hierin wordt met U^T de transpose van een matrix aangeduid ($U_{ij}^T = U_{ji}$) en met $U^\dagger$ de hermitische adjoint van een matrix, waarvoor geldt $U_{ij}^\dagger = (U_{ij}^T)^*$). Voor een rotatie-matrix en een unitary matrix moet dus gelden $UU^\dagger = I$, ofwel

$$U^{-1} = U^\dagger \tag{7}$$

Voor de matrix 2 is eenvoudig te controleren dat deze aan bovenstaande eis voldoet.

In drie dimensies heeft een rotatie een rotatie-as. Alle punten op de rotatie-as blijven bij een rotatie op hun plaats. Alle punten buiten de rotatie-as draaien in het vlak loodrecht op de as.

In vier dimensies heet de groep van rotaties SO(4) (de subgroep met determinant = 1). In vier dimensies is onderscheid te maken tussen een simpele en een dubbele rotatie. Bij een simpele rotatie is er een twee-dimensionaal vlak waarin alle punten onder de rotatie op hun plaats blijven. In elk punt van dit vlak is een volledig orthogonaal vlak en de rotatie vindt plaats in deze orthogonale vlakken. Het snijpunt van het invariante vlak en het orthogonale vlak is daarbij het centrum van de rotatie. En voor alle orthogonale vlakken wordt om dezelfde hoek gedraaid.

Bij een dubbele rotatie is er alleen een punt dat bij de rotatie op zijn plaats blijft. Bij een dubbele rotatie zijn er (minimaal) twee volledig orthogonale vlakken V_1 en V_2 die onafhankelijk van elkaar draaien. In het eerste vlak wort bijvoorbeeld gedraaid over de hoek α_1 en in het tweede onder α_2. Als $\alpha_1 = \alpha_2$ dan heet de rotatie isoclinic. In dit geval geldt voor elke lijn die door het rotatiecentrum gaat dat deze onder de hoek α_1 draait. Het vlak opgebouwd door de lijn en zijn onder α_1 gedraaid beeld is nu ook een vlak dat onafhankelijk draait. Er zijn in dit geval dus oneindig veel dergelijke onafhankelijk draaiende vlakken.

4 Eigenvectoren

Een eigenvector van een matrix M is een vector waarvoor geldt dat als de vector wordt getransformeerd van x naar Mx de richting van de vector nog steeds dezelfde is. Door de transformatie wordt de vector dus alleen in grootte veranderd. De factor waarmee de vector wordt vermenigvuldigd is de eigenwaarde. Het vinden van eigenvectoren en eigenwaarden gaat middels het oplossen van de karakteristieke vergelijking $Mx = \lambda x$ ofwel $(M - \lambda I)x = 0$, waarin λ een eigenwaarde is en x een eigenvector. Er is een eigenvector $x \neq 0$ als de operator $M - \lambda I$ singular is, ofwel de eis is

$$det(M - \lambda I) = 0 \tag{8}$$

Het uitschrijven van deze vergelijking leidt tot een polynoom in λ van orde N. Volgens de 'fundametele stelling van de algebra' zijn er dan N complexe oplossingen (als we elke oplossing vermenigvuldigen met zijn multipliciteit). Na het vinden van deze eigenwaarden vinden we de erbij horende eigenvectoren. Een voorbeeld zal het gebruik van complexe eigenwaarden en complexe eigenvectoren toelichten. We willen de eigenvectoren van de rotatie om $(\frac{\pi}{4})$ (zie 2) berekenen. De karakteristieke vergelijking is

$$det\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{4}) - \lambda & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0\\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) - \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

Uitschrijven van deze vergelijking leidt tot (met $\phi = \frac{\pi}{4}$)

$$-\lambda^3 + \lambda^2(1 + 2\cos(\phi)) - \lambda(1 + 2\cos(\phi)) + 1 = 0 \tag{10}$$

De oplossingen van de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ en $\lambda_3 = \cos(\phi) - i\sin(\phi)$, waarbij de laatste twee eigenwaarden natuurlijk ook te schrijven zijn als $\exp^{i\phi}$ en $\exp^{-i\phi}$.De eigenvectoren zijn te berekenen via Gausz-eliminatie uit de vergelijkingen $Mx = x$, $Mx = \exp^{i\phi} x$ en $Mx = \exp^{-i\phi} x$. De oplossingen zijn de volgende drie eigenvectoren

$$u_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix}1\\-i\\0\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad u_2 = \begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$$

u_1 en u_2 zijn niet genormaliseerd. Een eigenvector heeft alleen een richting. Meestal worden eigenvectoren genormaliseerd (lengte wordt 1 gemaakt).

De eerste eigenvector is in feite de rotatie-as. punten op de rotatie-as veranderen niet van plaats door de rotatie. De andere beide eigenvectoren zijn complexe vectoren. Er zijn geen reeele eigenvectoren. Merk op dat het reeele deel van de beide complexe vectoren gelijk is, het imaginaire deel het negatieve van elkaar is. Als we de volgende twee vectoren u_r en u_l definieren

$$u_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan geldt dat $u_1 = u_r - i\ u_l$ en $u_2 = u_r + i\ u_l$. Het effect van de rotatiematrix M op u_r en u_l is dan te bepalen door

$$\begin{aligned} M(u_r) &= M(1/2(u_1 + u_2)) \\ &= 1/2(\exp^{i\phi} u_1 + \exp^{-i\phi} u_2) \\ &= 1/2(\exp^{i\phi}(u_r - iu_i) + \exp^{-i\phi}(u_r + iu_i)) \\ &= cos(\phi)u_r + sin(\phi)u_i \end{aligned} \tag{11}$$

en een soortgelijke afleiding voor M op u_i geeft $M(u_l) = cos(\phi)u_l - sin(\phi)u_r$. Dit zijn de normale transformaties voor een rotatie in een plat vlak. In het algemeen kan van een rotatiematrix in N dimensies op deze manier worden afgeleid of er een rotatie-as is (dit is zo als N oneven is) en in welke twee-dimensionale vlakken er een rotaties optreden, horend bij eigenvalues van de vorm $\pm\phi$.

5 Projecties

Er zijn verschillende vormen van projecties. Een eerste beperking is om alleen lineaire projecties te beschouwen. Er worden twee soorten lineaire projecties verder uitgewerkt. De eerste is de projectie van een punt uit een N-dimensionale ruimte naar een N-1 dimensionale ruimte in een bepaalde richting. Denk bijvoorbeeld aan de afbeelding van een punt uit een 3D ruimte naar een 2D vlak. Een lijn $o_l + \lambda_l v_l$, waarin o_l het punt op de lijn is dat geprojecteerd wordt in de richting v_l snijdt een N-1 dimensionale ruimte weergegeven door $o_v + \lambda_0 v_1 + ...\lambda_{n-1} v_{n-1}$. Voor het snijpunt geldt $o_l - o_v = \lambda_0 v_1 + ...\lambda_{n-1} v_{n-1} - \lambda_l v_l$. Het betreft een stelsel van N lineaire vergelijking met N onbekenden, die op standaard manier een oplossing voor de λ's geeft.

De tweede soort projectie is een afbeelding van een N-dimensionale ruimte naar een K (K ¡ N) dimensionale ruimte. Het gaat hierbij om de orthogonale (loodrechte) projectie van een punt, zodat de afstand tussen het punt en de K dimensionale ruimte minimaal is. Dit soort projectie is natuurlijk alleen gedefinieerd als de ruimte een afstandsfunctie heeft. De projectie van een punt uit een driedimensionale ruimte op een lijn is een voorbeeld van zo' projectie. Indien de lijn evenwijdig is aan een basisvector is de projectie simpel. Als de subspace waarop geprojecteerd wordt een orthonormale basis u_1 ... u_K hebben dan vormen we een projectiematrix

$$P = AA^T$$

waarin A de matrix is bestaande uit de k basisvectoren.

6 Penrose tilings

In een tiling (betegeling) wordt gebruik gemaakt van een eindig aantal vormen die, rekening houdend met een aantal regels, een vlak (ruimte) vult, zonder dat delen van het vlak niet gevuld worden. Met vierkanten, rechthoeken, parallellogrammen, driehoeken, zeshoeken kan volstaan worden met slechts één vorm om het gehele platte vlak te vullen.

Een Penrose tiling is ingewikkelder. Er zijn verschillende Penrose tilings, maar de eenvoudigste bestaat uit een tiling met twee ruiten (rhombus in het engels). Er is een spitse ruit en een stompe ruit. Aanvullend zijn er regels die bepalen welke zijden van de ruiten aan elkaar gelegd mogen worden.

Voor een wiskundige benadering van Penrose tilings wordt verwezen naar [1]. Daar geeft de nederlander de Bruijn (geniaal) weer op welke manieren de Penrose tilings kunnen worden gemaakt. Een andere, hierop gebaseerde, met veel figuren toeglichte, behandeling is te vinden in [2].

Er worden door de Bruijn een drietal verschillende manieren weergegeven om Penrose tilings te maken. Een inflation-deflation methode, een pentagrid methode en een projectie methode. De laatste wordt hier verder gevolgd. Deze methode heeft trouwens veel gemeen met de pentagrid aanpak. Begonnen wordt met de definitie van het vlak waarop wordt geprojecteerd, daarna wordt aangegeven wat een pentagrid op dat vlak voorsteld en tenslotte wordt aangegeven hoe met de projectiemethode een Penrose tiling is te tekenen.

Voor het maken van een penrose tiling wordt hierbij gebruik gemaakt van een speciaal daarvoor geconstrueerd vlak in vijf dimensies. Het vlak wordt gedefinieerd door eerst een rotatie R in een vijfdimensionale wereld te definieren en wel als: de rotatie R heeft als effect dat een punt $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ na de rotatie als coordinaten $(x_4, x_0, x_1, x_2, x_3)$ heeft.

Gemakkelijk is in te zien dat voor deze rotatie geldt dat de punten van de lijn $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ op dezelfde plaats blijven en ook dat geldt $R^5 = I$.

De matrix voor R is

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

De matrix eigenvalues zijn op dezelfde manier als in 4 te bepalen. De waarden zijn 1, $\exp^{2\pi i/5}$, $\exp^{-2\pi i/5}$, $\exp^{4\pi i/5}$ en $\exp^{-4\pi i/5}$. De eigenwaarden geven aan dat er een invariante lijn is (eigenwaarde 1, de eigenvector is de lijn $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$) en twee onafhankelijke draaivlakken (de eerste met draaiing $2\pi i/5$ en de tweede met draaing $4\pi i/5$). In de projectie-methode wordt het eerste draaivlak gebruikt om op te projecteren. De eigenvectoren behorend bij $\exp^{2\pi i/5}$, $\exp^{-2\pi i/5}$, overeenkomend met $0.0.3090 \pm 0.9511\ i$ zijn:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.13 - 0.42i \\ -0.36 - 0.26i \\ -0.36 + 0.26i \\ 0.13 + 0.42i \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.13 + 0.42i \\ -0.36 + 0.26i \\ -0.36 - 0.26i \\ 0.13 - 0.42i \end{bmatrix}$$

Het vlak waarop wordt geprojecteerd is dus $\lambda_0 u_r + \lambda_1 u_i$, waarin u_r en u_i de gevonden "reeele eigenvectoren" zijn

$$u_r = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.13 \\ -0.36 \\ -0.36 \\ 0.13 \end{bmatrix}, u_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.42 \\ -0.26 \\ +0.26 \\ +0.42 \end{bmatrix}$$

twee onderling loodrecht op elkaar staande vectoren.

Als we kijken naar de doorsnede van dit vlak met de subspace $x_0 = n$ dan levert dat een aantal lijnen op, die evenwijdig zijn met u_i. Voor $lambda_0 = 0$ hebben we de doorsnee met de subspace $x_0 = 0$ en voor $\lambda_0 = 2.27$ de doorsnee met de subspace $x = 1$.

De doorsnee van het vlak met de subspace $x_4 = n$ levert ook een aantal lijnen op. Het tekenen ervan kan met de volgende handigheid worden gedaan. Door de matrix R toe te passen op de vijfdimensionale wereld zal het vlak draaien over $2\pi/5$ en zal x_4 de plaats innemen van x_0. De lijnen horend bij $x_4 = n$ komen dan op dezelfde plaats op het vlak waar eerder de $x_0 = n$ lijnen kwamen toen het vlka nog niet gedraaid was. Op dezelfde manier kunnen ook de lijnen voor $x_1 = n$, $x_2 = n$ en $x_3 = n$ worden getekend. De vijf families van lijnen vormen samen het zogenaamde pentagrid over het vlak. Met behulp van het pentagrid is vervolgens een penroe tiling te tekenen. Elk kruispunt van twee lijnen scheidt vier vlakken van elkaar en het punt zelf wordt geidentificeerd door de waardes van de vijf families van lijnen in dat punt. Voor elk kruispunt van lijnen wordt één hoekpunt van een penrose ruit getekend en wel op de plaats $\sum_i n_i\ e_i$. Hierin zijn de e_i vijf vectoren, elk een eenheidsvector loodlecht op een familie lijnen. Bij elk kruispunt zullen twee van de coordinaten van de vier vlakken op het kruispunt de waarde met één ophogen. Als de coordinaat x_{i1} de overgang maakt van $N_{i1} \to N_{i1} + 1$ en coordinaat x_{i2} de overgang van $N_{i2} \to N_{i2} + 1$, dan hoort daarbij een penrose ruit met een zijde in de richting van e_{i1} en de andere zijde in de richting van e_{i2}.

De projectie methode om een penrose tiling te maken werkt ook met de vijf vectoren e_i, alleen er wordt op een andere manier bepaald welke n_i in $\sum_i n_i\ e_i$ moeten worden gebruikt. De vijf-dimensionale ruimte kan worden opgedeeld in kubussen (penteracten) en deze kubussen zullen ons twee-dimensionaal vlak snijden via de eerder genoemde lijnen van het pentagrid. We kunnen aan een kubus met grensvlakken $x_i = n_i$ en $x_i = n_i + 1$ de coordinaten $(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4)$ meegeven. Als we ons beperken tot kubussen die ons twee-dimensionaal vlak snijden, zal de overgang van de ene kubus naar een andere kubus overeenkomen met het het overtrekken van een lijn van een pentagrid. De coordinaten die aan de kubussen zijn gegeven komen dus overeen met de coordinaten die aan de vlakken van een pentagrid worden gegeven. In plaats van een pentagrid is dus ook de verzameling van vijf-dimensionale kubussen te gebruiken die het twee-dimensionale vlak doorsnijden en vervolgens de coordinaten $(n_0, n1, n_2, n_3, n_4)$ van alle kubussen op dezelfde manier als bij een pentagram af te beelden naar de hoekpunten van de Penrose ruiten.

7 Vervolg van dit project

Allereerst zal een computer-programma worden gemaakt voor het visualiseren van Penrose tilings. De volgende stap zal zijn om ook andere projecties dan die bij Penrose is gebruikt te onderzoeken. de projecties waaraan wordt gedacht zijn in eerste instantie projecties op andere vlakken dan bij Penrose en projecties vanuit hogere dimensies dan vijf.

References

[1] N.G. de Bruijn, "Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane," *Proceedings of then Koninklijke Nedrlandse Akademie van Wetenschappelijke Series A*, 84(1), March, 1981, 39-66

[2] American Mathematical Society, "Perose tilings tied up in Robbons", http://www.ams.org/featurecolumn/archive/ribbons.html

[3] Wikipedia, "Tesseract", http://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract

[4] Wikipedia, "SO(4)", http://en.wikipedia.org/wiki/SO(4)